Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный педагогический университет»
Институт математики, физики, информатики и технологий
Кафедра высшей математики и методики обучения математике

«Формирование познавательных универсальных учебных действий у обучающихся в процессе обучения решению задач на доказательство**»**

Выпускная квалификационная работа

Направление подготовки «44.03.01 – Педагогическое образование.
Профиль «Математика»

Работа допущена к защите:
Заведующий кафедрой

____
дата подпись

Исполнитель:
Овчинникова Е.П. – студентка
группы МАТ-1601z
заочного отделения

____
подпись

Научный руководитель:
Блинова Т.Л. – к. пед. н., доцент
кафедры высшей математики и
методики обучения математике

____
подпись

Екатеринбург, 2021

Оглавление

Введение

Перемены, которые происходят в современном обществе, требуют ускоренного совершенствования всего образовательного пространства, определения целей образования, учитывающих личностные, государственные и социальные интересы и потребности. В связи с этим главным направлением становится обеспечение развивающего потенциала новых образовательных стандартов.

В ФГОС основного общего образования требования заявлены к предметным и метапредметным результатам. В перечне метапредметных результатов присутствуют познавательные универсальные действия, которые обеспечивают формирование у обучающихся научной картины мира; развитие способности управлять своей интеллектуальной и познавательной деятельностью; овладение методологией познания, способами и стратегиями познания и учения; развитие продуктивного воображения, символического, логического, произвольных памяти и внимания, рефлексии, творческого мышления.

Основой для разработки понятия универсальных учебных действий служит деятельностный подход, который базируется на положениях научной школы Л.С. Выготского, А. Н. Леонтьева, Д. Б. Эльконина, В. В. Давыдова, П.Я. Гальперина. В данном подходе наиболее полно раскрыты основные механизмы процесса формирования картины мира, усвоения знаний, психологические условия, а также общая структура учебной деятельности обучающихся.

Проблема формирования познавательных универсальных учебных действий обучающихся рассматривалась в различных научных исследованиях.

На современном этапе группа авторов (А.Г. Асмолов, Л.И. Боженкова, Г.В. Бурменская, И.А.Володарская, О.А.Карабанова и С.В.Молчанов) раскрывает сущность понятия универсальных учебных действий, рассматривает отдельные методические вопросы данной проблемы и предлагает пути их решения.

ПУУД направлены: на поиск необходимой информации, на доказательство, на выведение следствий, построение логической цепочки рассуждений, выдвижение гипотез и их обоснование, на постановку и решение проблемы и др. Все эти умения могут быть сформированы в процессе обучения решению задач на доказательство. В связи с этим, рассмотрение процесса организации обучения решению задач на доказательство в условиях нового Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования является актуальным для современного учителя.

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: задачи на доказательство как средство формирования познавательных универсальных учебных действий у обучающихся.

Цель работы: разработать конспекты уроков с поэтапным решением задач на доказательство, направленных на формирование познавательных универсальных действий обучающихся.

Задачи:

1. Проанализировать методическую, психолого-педагогическую литературу и Интернет с целью определения понятия познавательных универсальных учебных действий.
2. Рассмотреть понятие познавательных универсальных действий и выделить их виды.
3. Изучить требования к организации учебного процесса, направленного на формирование познавательных УУД на уроках математики.
4. Охарактеризовать задачи как средство формирования познавательных универсальных учебных действий.

5. Определить основные этапы работы над задачей, выделить формы и приёмы работы на каждом этапе.

6. Выделить требования к отбору и конструированию задач на доказательство, направленных на формирование познавательных УУД обучающихся 7-9 классов.

7. Разработать конспекты уроков с поэтапным решением задач на доказательство, направленных на формирование познавательных УУД обучающихся.

Данная работа состоит из введения, двух глав и заключения.

Глава 1. Особенности формирования познавательных универсальных учебных действий у обучающихся в процессе обучения математике

1.1. Понятие познавательных универсальных учебных действий и их виды

Под универсальными учебными действиями идеологами стандарта нового поколения понимается, в широком смысле, умение учиться, а в узком – совокупность способов действий, обеспечивающих самостоятельное усвоение новых знаний, формирование умений, включая организацию этого процесса.

Универсальные учебные действия обеспечивают учащимся возможность самостоятельно осуществлять деятельность учения, ставить учебные цели, искать и использовать способы их достижения, контролировать и оценивать процесс и результаты деятельности, а тем самым обеспечивают успешное усвоение знаний, формирование умений, навыков и компетентностей в любой предметной области [9].

Одним из четырех видов универсальных учебных действий являются познавательные.

Познавательные УУД – общеучебные, логические действия, направленные на развитие умения работать с текстовой, графической и другой информацией из разных источников. Это те действия, которые обучающийся сможет применить на любом уроке [2].

У обучающихся должны быть сформированы следующие познавательные универсальные учебные действия в процессе обучения: общеучебные, логические, а также постановка и решение проблемы.

Общеучебные универсальные действия:

- самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели;
- поиск и выделение необходимой информации; применение методов информационного поиска, в том числе с помощью компьютерных средств:

− умение определять, какие знания необходимо приобрести для решения учебных, межпредметных задач;

− умение отбирать для решения задач необходимые источники информации (словари, энциклопедии, справочники, электронные и интернет – ресурсы, СМИ);

− умение сопоставлять и отбирать информацию, полученную из различных источников;

• структурирование знаний:

− умение представлять информацию в виде графиков, схем, диаграмм;

− умение представлять информацию при помощи своей системы обозначений;

− умение получить информацию из представленного графика, диаграммы, схемы;

− умение достраивать недостающие элементы совокупности;

− умение устанавливать связи между объектами и их частями [8];

• осознанное и произвольное построение речевого высказывания в устной и письменной форме;

• выбор наиболее эффективных способов решения задач, в зависимости от конкретных условий:

− умение определять наиболее простой способ решения задачи из представленных в определенных условиях;

− умение определять условия, при которых представленный способ решения задачи будет наиболее простым;

− умение решать задачу несколькими способами [8];

• рефлексия способов и условий действия, контроль оценка процесса и результатов деятельности:

− умение выделить критерии для оценки результата или процесса;

− умение оценить по заданной системе критериев;

− умение нахождения ошибок в решении;

- смысловое чтение как осмысление цели чтения и выбор вида чтения в зависимости от цели; извлечение необходимой информации из прослушанных текстов различны жанров; определение основной и второстепенной информации; свободная ориентация и восприятие текстов художественного, научного, публицистического и официально-делового стилей; понимание и адекватная оценка языка средств массовой информации.

Особую группу общеучебных универсальных действий составляют знаково-символические действия:

- моделирование — преобразование объекта из чувственной формы в модель, где выделены существенные характеристики объекта (пространственно-графическая или знаково-символическая);
- преобразование модели с целью выявления общих законов, определяющих данную предметную область.

Логические универсальные действия:

- анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных):
  - умение разделять объект на части;
  - умение располагать части в определенной последовательности;
  - умение характеризовать части этого объекта [9];
- синтез — составление целого из частей, в том числе самостоятельное достраивание с восполнением недостающих компонентов:
  - умение выделять основание объединения;
  - умение объединять элементы по заданному основанию;
  - умение преобразовать целое по другому основанию [8].
- выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов:
  - умение определять основание классификации объектов;
  - умение распределять элементы по заданному критерию;
  - умение выделять признаки, по которым сравниваются объекты;
  - умение выделять признаки сходства/различия;

- умение выделять главное и второстепенное в изучаемом объекте;
- умение выделить признаки объекта по определенному критерию [8].

• подведение под понятие, выведение следствий:

- умение формулировать понятие, под которое подводится исследуемый объект;
- умение выделять существенные признаки данного понятия (ближайшее родовое понятие, видовые отличия), зафиксированные в определении;
- умение устанавливать логические связи между выделенными признаками;
- умение устанавливать наличие у объекта выделенных существенных признаков и связей между ними;
- умение делать вывод о принадлежности объекта данному понятию (всеми ли существенными признаками и связями между ними обладает исследуемый объект);
- умение выделять существенные признаки объекта, принадлежащие данному понятию, т.е. такие, которые являются следствием принадлежности его к данному классу к данному понятию, а также дополнительных свойств объекта;

• установление причинно-следственных связей:

- умение определять истинность логических суждений по заданным исходным условиям;
- умение определять исходные условия по заданным логическим суждениям;
- умение определять условия по заданным исходным данным и конечному результату [7];
- умение находить главное в изучаемом явлении или объекте;
- умение устанавливать главную причину явления;
- умение кратко оформлять высказывание, связывающее причину и следствие [8];

• построение логической цепи рассуждений:

– умение разделять рассуждения на основные компоненты;

– умение устанавливать связи между выделенными компонентами;

– умение располагать компоненты в определенной последовательности;

• доказательство;

• выдвижение гипотез и их обоснование:

– умение формулировать вывод/предположение на основе нескольких положений;

– умение определить закон, которому подчиняется данное явление;

– умение разделять гипотезу/предположение на структурные составляющие;

– умение выбирать из нескольких предположений/выводов/гипотез наиболее верные корректные, в наибольшей степени отражающие заданные посылки;

– умение обосновывать гипотезу, используя известные теоретические факты или наблюдения и эксперименты.

Постановка и решение проблемы:

• формулирование проблемы [8]:

- умение прогнозировать условия, при которых невозможно решение задачи;

- умение определять изменения в условиях;

- умение определять недостаточную для решения задачи информацию;

• самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера.

Следует помнить, что при формировании познавательных УУД необходимо обращать внимание на установление связей между вводимыми учителем понятиями и прошлым опытом обучающихся, в этом случае ученику легче увидеть, воспринять и осмыслить учебный материал.

Предполагается, что результат формирования познавательных универсальных учебных действий будет следующим, выпускник научится:

- основам реализации проектно-исследовательской деятельности;

- проводить наблюдение и эксперимент под руководством учителя;

- осуществлять расширенный поиск информации с использованием ресурсов библиотек и Интернета;

- создавать и преобразовывать модели и схемы для решения задач;

- осуществлять выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий;

- давать определение понятиям;

- устанавливать причинно-следственные связи;

- осуществлять логическую операцию установления родовидовых отношений, ограничение понятия;

- обобщать понятия – осуществлять логическую операцию перехода от видовых признаков к родовому понятию, от понятия с меньшим объемом к понятию с большим объемом;

- осуществлять сравнение, классификацию, самостоятельно выбирая основания и критерии для указанных действий;

- строить рассуждение, включающее установление причинно-следственных связей;

- объяснять явления, процессы, связи и отношения, выявляемые в ходе исследования;

- основам ознакомительного, изучающего, усваивающего и поискового чтения;

- структурировать тексты, включая умение выделять главное и второстепенное, главную идею текста, выстраивать последовательность описываемых событий;

- работать с метафорами – понимать переносный смысл выражений, понимать и употреблять обороты речи, построенные на скрытом уподоблении, образном сближении слов.

Таким образом, в данном параграфе рассмотрено понятие познавательных универсальных учебных действий, а также дана их характеристика и классификация.

1.2. Требования к организации учебного процесса по математике, направленного на формирование познавательных универсальных учебных действий обучающихся

Урок остается основной единицей учебного процесса, но в связи с реализацией ФГОС ООО, меняются требования к уроку. Стандарт второго поколения предлагает иную классификацию уроков.

Требования к современному уроку по ФГОС:

- личностно-ориентированный, индивидуальный характер;
- ядром является самостоятельная работа обучающихся;
- практический, системно-деятельностный подход;
- формирование и развитие УУД;
- учитель – помощник в освоении новых знаний.

Сегодня актуальными являются 4 (основных) типа уроков представленных в таблице 1.

Таблица 1

Основные типы и виды уроков по ФГОС с используемыми педагогическими технологиями

Типы уроков	Виды уроков	Педагогические технологии
Урок открытия нового знания	Лекция, путешествие, инсценировка, проблемный урок, экскурсия, беседа, конференция, мультимедиа урок, игра и др.	ИКТ, технология проблемного обучения, здоровьесберегающие технологии, и др.
Урок рефлексии	Сочинение, практикум, диалог, ролевая игра, деловая игра, комбинированный урок.	ИКТ, обучение в сотрудничестве, технологии критического мышления
Урок общеметодологической направленности	Конкурс, конференция, экскурсия, консультация, урок – игра, диспут, обсуждение, урок суд, урок откровение и др.	Игры, групповые формы работы, ИКТ, проблемное обучение, метод проектов
Урок развивающего контроля	Письменные работы, устные опросы, викторины, смотр знаний, творческий отчет, защита проектов, рефератов, тестирование, конкурсы.	Возможно применение всех технологий

Значительная роль при формировании познавательных универсальных учебных действий отводится именно урокам математики.

Содержание познавательных УУД, формируемых на уроках математики:

- осознание, что такое свойства предмета – общие, различные, существенные, несущественные, необходимые, достаточные;
- моделирование;
- использование знаково-символических средств;
- овладение приемами анализа и синтеза объекта и его свойств;
- использование индуктивного умозаключения;
- выведение следствий из определения понятия;
- умение приводить контрпримеры.

Одно из важных познавательных универсальных действий – умение решать проблемы или задачи. Усвоение общего приема решения задач в школе базируется на сформированности логических операций:

- анализ объекта;
- сравнение;
- выделение общего и различного;
- классификация, логическая мультипликация (логическое умножение);
- установление аналогий [1].

Умение ставить и решать задачи является одним из основных показателей уровня развития обучающихся, позволяет овладевать новыми знаниями.

Помимо приема решения задач, формирование познавательных универсальных учебных действий на уроках математики происходит при помощи следующих средств:

1) формирование моделирования как необходимого универсального учебного действия;

2) широкое использование продуктивных заданий, требующих целенаправленного использования и, как следствие, развития таких

важнейших мыслительных операций, как анализ, синтез, классификация, сравнение, аналогия;

3) использование заданий, позволяющих научить школьников самостоятельному применению знаний в новой ситуации [12].

Формирование познавательных УУД на уроках математики обеспечивает приобретение учащимися опыта работы с информацией, а именно:

- уметь осуществлять поиск нужной информации с использованием различных ресурсов, в том числе и интернета;
- уметь структурировать информацию, находить наиболее эффективные способы решения;
- решать задачи с избытком или недостатком информации;
- осуществлять переработку математической информации для ее дальнейшего использования, записывать и фиксировать ее с помощью средств ИКТ и другими средствами, использовать измерительные инструменты и т. д.

К основным видам заданий, направленных на развитие познавательных УУД можно отнести:

- работу с таблицами и справочниками;
- задания на составление опорных схем, диаграмм; задания на поиск лишних элементов, поиск различий;
- задания «Лабиринты», «Цепочки»;
- все задания, сопровождаемые инструкцией: «Сравни…», «Разбей на группы…», «Найди истинное высказывание…»;
- занимательные и нестандартные задания;
- задания с моделями: самостоятельное создание и их применение при решении предметных задач;
- задания на классификацию, доказательство.

Пример заданий, которые помогают сформировать у обучающихся познавательные УУД на уроках математики:

1. В вагоне метро сидели 6 женщин и 4 мужчины. На станции 1 человек вышел. Сколько человек осталось в вагоне?

Женя решил эту задачу так:

1) 6 + 4 = 10

2) 10 – 1 = 9

Ответ: 9 человек.

Оля решила эту задачу так:

1) 4 – 1 = 3

2) 6 + 3 = 9

Ответ: 9 человек.

Оба ученика решили задачу правильно.

Объясни, что узнавал каждым действием Женя, и что – Оля.

Найди ещё одно решение этой задачи.

2. Прочитайте слова. Найдите лишнее слово: Сложение, вычитание, плюс, минус, слагаемое, уменьшаемое, слагаемое, вычитаемое, сумма, умножение, разность.

3. Из выражений выпишите и решите те, в которых первым действие будет выполняться вычитание: 70 - 42+14; 70 - (40+12); 23 + 26 - 11; 34 + 20:(15 - 10); 54+(7 -1) : 10.

4. Начерти прямоугольник со сторонами 5 см и 3 см. Найди его периметр. Начерти квадрат с таким же периметром.

5. Сравни примеры в каждом столбике. Определи, по какому правилу они составлены. Запиши ещё по одному примеру и вычисли.

10 – 4 – 2	*1 + 6 – 5*	*9 – 4 + 3*
10 – 3 – 3	*1 + 7 – 4*	*8 – 4 + 4*
10 – 2 – 4	*1 + 8 – 3*	*7 – 4 + 5*
…	…	…

6. Объясни, как получается следующее число в каждом ряду, и продолжи ряды:

1) 10, 8, 6, … ;

2) 0, 3, 6, … ;

3) 9, 7, 5, … ;

4) 1, 3, 5, … .

7. «Умение выстраивать стратегию поиска решения задач».

Задача:

Забавляясь, обезьяны на две группы разделились:

Часть восьмая их в квадрате в роще весело резвилась,

А двенадцать хором пели, на любимом сидя месте.

Сосчитайте, сколько в роще обезьянок было вместе.

Инструкция: решить предложенную задачу, выполнить проверку полученного решения, а затем обсудить решение совместно с учителем и другими учениками класса.

8. «Решение ребуса».

Решите уравнения и расшифруйте полученное слово.

1) $35x^2 + 2x - 1 = 0$;   5) $4 - x^2 = 0$;

2) $9y^2 + 30y + 25 = 0$;   6) $x^2 - 9x + 14 = 0$;

3) $3x^2 - 15 = 0$;   7) $2x^2 - 11x + 9 = 0$;

4) $0{,}5x^2 - 3{,}5x = 0$;   8) $-3x^2 + 7x + 10 = 0$.

Инструкция:

1) Решить предложенные квадратные уравнения.

2) Проверить полученные корни уравнения.

3) Сопоставить значение корня и букву алфавита, пронумеровав буквы в порядке возрастания (а-1, б-2, ….).

4) Составить из полученных букв слово.

5) Обсудить полученный результат совместно с учителем и другими учениками класса.

9. Установите закономерность и найдите два первых и два последних числа данного ряда.

		32	64	128		
		46	59	72		
		135	118	101		
		243	81	27		

10. На столе лежат овощи: свекла, морковь, огурец, помидор. Сколькими способами можно составить набор из двух овощей?

Такой тип задач можно легко решить, построив таблицу.

Данные заносятся в первую колонку. Затем, подставляется каждый вид овощей в пустые ячейки каждой из строк, учитывая, что комбинация, состоящая из двух овощей, не должна повторяться. Получается следующее :

Свекла	Морковь	Огурец	Помидор
Морковь	Огурец	Помидор	
Огурец	Помидор		
Помидор			

Подсчитав результаты, дети увидят, что из 2 овощей этих видов можно составить различных 6 наборов.

11. Найдите лишнее слово в каждом столбике.

арифметика	условие	ширина
статистика	ответ	высота
уравнение	треугольник	площадь
алгебра	вопрос	задача
геометрия	решение	длина

12. Даша, Вика, Кристина и Катя пили чай. У Вики чашка не желтая и не синяя. Справа от Кристины сидела Даша, у которой зеленая чашка. Какого цвета чашки у девочек?

Решение. Задача решается путём заполнения таблицы, при заполнении которой обучающиеся могут самостоятельно построить цепочку умозаключений.

Имена	Чашки			
	жёлтая	красная	синяя	зелёная
Даша	-	-	-	+
Вика	-	+	-	-
Катя	+	-	-	-
Кристина	-	-	+	-

13. *На доске выписаны числа от 1 до 2150. Каждую минуту каждое число подвергается следующей операции: если число делится на 100, то его делят на 100, если же не делится, то из него вычитают 1. Найдите наибольшее среди чисел на доске через 87 минут.*

Решение: Все числа, две последние цифры которых - 86 или меньше, за 87 минут успеют превратиться в числа, оканчивающиеся на 00, и следующим шагом уменьшится в 100 раз. В итоге все такие числа через 87 минут окажутся не больше, чем 2100/100 = 21. Те же числа, которые оканчиваются на 87 и более, за 87 минут уменьшатся на 87. Наибольшее из таких чисел - 2099, и оно через 87 минут превратится в 2012. **Ответ:** 2012.

Для формирования универсальных учебных действий на уроках математики можно выделить 4 этапа:

1- й этап — вводно-мотивационный.

Чтобы обучающийся начал «действовать», необходимы определенные мотивы. На уроках математики необходимо создать проблемные ситуации, где ученик проявляет умение комбинировать элементы для решения проблемы. На этом этапе обучающиеся должны осознать, почему и для чего им нужно изучать данную тему, и изучить, какова основная учебная задача предстоящей работы (используется технология проблемного обучения).

2-й этап — открытие математических знаний.

На данном этапе решающее значение имеют приемы, требующие самостоятельных исследований, стимулирующие рост познавательной потребности обучающихся.

3-й этап — формализация знаний.

Основное назначение приемов на этом этапе — организация деятельности обучающихся, направленная на всестороннее изучение установленного математического факта.

4-й этап — обобщение и систематизация.

На этом этапе применяются приемы, которые устанавливают связь между изученными математическими фактами, приводят знания в систему.

Формирование всех составляющих учебно-познавательной компетентности происходит в процессе осуществления учебно-познавательной деятельности, соотносится с этапами ее формирования, т.е. носит деятельностный характер.[11]

Таким образом, ведущую роль в формировании познавательных универсальных учебных действий играет подбор содержания, выбор методических приемов, средств, разработка конкретного набора учебных заданий.

ВЫВОДЫ ПО 1 ГЛАВЕ

В первой главе работы рассмотрены особенности формирования познавательных универсальных учебных действий у обучающихся в процессе обучения математике. Основные понятие системы универсальных учебных действий обучающихся сосредоточены в рамках ФГОС и определяются использованием системно-деятельностного подхода. Система УУД состоит из личностных, регулятивных, познавательных и коммуникативных действий.

Рассматривая подробно познавательные УУД, был сделан вывод, что они подразделяются на общеучебные универсальные действия, логические универсальные действия, постановка и решение проблемы.

Формирование познавательных универсальных учебных действий обучающихся в процессе обучения математике имеет определенные условия и содержание, которые были рассмотрены в данной главе в качестве требований к организации учебного процесса.

Выделены основные виды заданий, направленных на развитие познавательных УУД, такие как работа с таблицами и справочниками; задания на составление опорных схем, диаграмм; задание на поиск лишних элементов, поиск различий; задания «Лабиринты», «Цепочки»; все задания, сопровождаемые инструкцией: «Сравни…», «Разбей на группы…», «Найди истинное высказывание…»; занимательные и нестандартные задания; задания с моделями: самостоятельное создание и их применение при решении предметных задач; задания на классификацию, доказательство.

Умение ставить и решать задачи является одним из основных показателей уровня развития обучающихся. А также решение проблем и задач является эффективным средством формирования познавательных УУД. Потенциал обучения решению задач на доказательство в формировании познавательных учебных действий рассмотрен в следующей главе.

Глава 2. Формирование познавательных УУД обучающихся в процессе обучения решению задач на доказательство

2.1. Задачи на доказательство, как средство формирования познавательных универсальных учебных действий обучающихся

Реализация современной роли математики предполагает улучшение математической подготовки обучающихся, важное место в которой отводится умению открывать закономерности, обосновывать их и применять на практике. Поэтому проблема обучения обучающихся решать задачи на доказательство является одной из центральных в методике преподавания математики.

Доказательство – логическая форма мышления, в которой из истинности определенных суждений (условий) с помощью ряда последовательных умозаключений определенным образом (по правилам) выясняется истинность некоторого предложения (заключения) [5].

Теорема – математическое предложение, истинность которого устанавливается посредством доказательства [10]. Соответственно, теорема – это и есть задача на доказательство.

Г.И. Саранцев выделил следующие этапы изучения теоремы [30]:

I. Мотивация изучения теоремы.

II. Ознакомление с фактом, отраженным в теореме.

III. Усвоение содержания теоремы, её структуры.

IV. Запоминание формулировки теоремы.

V. Ознакомление со способом доказательства.

VI. Доказательство теоремы.

VII. Применение теоремы.

VIII. Установление связей теоремы с ранее изученными теоремами.

Указанные этапы отражают деятельностную природу теоремы, особенности математического знания и его усвоения. Отсюда главным в изучении теорем является не заучивание их и их доказательств, а открытие школьниками теоремы, способа доказательства, самостоятельное конструирование доказательства, применение теоремы в различных ситуациях, установление различных связей теоремы с другими теоремами [29].

I этап – мотивация изучения теоремы.

Сущность данного этапа заключается в подчеркивании важности изучения теоремы, а также в побуждении обучающихся к целенаправленной и активной деятельности.

Перед изучением теоремы рекомендуется на уроке создать проблемную ситуацию, разбор которой мотивировал бы необходимость изучения этой теоремы. С этой целью используются различные практические ситуации и мотивационные упражнения. Для мотивировки необходимости изучения теорем можно использовать следующие приемы [16]:

Прием 1. Обобщение наблюдаемых в жизни фактов и явлений и перевод их на математический язык.

Прием 2. Показ необходимости знания той или иной теоремы для решения практических задач.

Прием 3. Показ необходимости знания той или иной теоремы для решения задач и доказательства других теорем.

Прием 4. Показ, как решалась данная проблема в истории науки.

Работа на первом этапе связана с обзором потребностей практики или других исторических причин, приводящих к появлению рассматриваемого утверждения о свойствах некоторых понятий. Этап мотивации напрямую связан со вторым этапом изучения теоремы.

II этап - ознакомление с фактом, отраженным в теореме.

Целью данного этапа является выявление факта, отраженного в теореме, и знакомство с ним. Перечисленные на предыдущем этапе приемы для мотивации изучения теорем служат одновременно и раскрытию её содержания. Кроме перечисленных можно выделить следующие приемы раскрытия содержания теорем [16]:

1. Наблюдение наглядного материала, в том числе подвижных моделей или ряда чертежей. Например, перед изучением теоремы о высоте треугольника, проведенной из вершины прямого угла на гипотенузу, можно поработать с подвижной моделью прямоугольного треугольника, вписанного в окружность, две стороны AC и CB и высота CD которого изготовлены из резинки. Перед обучающимися ставится задача: анализируя модель, найти зависимость между высотой CD и отрезками гипотенузы AD и DB [10].

2. Выполнение лабораторных и практических работ. Например, с теоремой о сумме углов треугольника обучающиеся могут ознакомиться, измеряя непосредственно углы треугольника. Обобщая результаты измерений, обучающиеся приходят к выводу, что сумма углов треугольника равна 180° [10].

3. Решение задач на вычисление и доказательство. Например, раскрыть содержание теоремы «В прямоугольнике диагонали равны» можно, решив с обучающимися устно несколько задач вида: «Вычислите диагонали прямоугольника ABCK, если его стороны равны: а) 3 и 4 см; б) 6 и 8 дм; в) 12 и 9 м. Какой вывод можно сделать из решения этих задач?».

4. Решение задач на отыскание некоторых зависимостей. Например, открыть зависимость между вписанным углом и дугой, на которую он опирается, обучающиеся могут, решив следующую задачу: *«Найти угол ABC, вписанный в окружность с центром O, если* $O \in BC$ *и* $\smile AC = 70°$*»* [29].

Таким образом, на первых двух этапах работы с теоремой (задачей на доказательство) обучающиеся при рассмотрении задач, или работы с моделями, выявляют места и причины затруднений, определяют недостаточную для решения задачи информацию. Для поиска решения возникшей проблемы обучающиеся находят главное в изучаемом явлении, устанавливают его причину, на основе чего выдвигают и формулируют предположения о том, какой математический факт необходимо доказать, осознают необходимость его обоснования. При выдвижении гипотезы обучающиеся включаются в обсуждение, в ходе которого строят осознанное речевое высказывание. Также в процессе работы над раскрытием содержания теоремы обучающиеся кратко оформляют высказывание, связывающее причину и следствие, и формулируют познавательную цель, которая состоит в изучении теоремы и доказательстве факта, отраженного в ней. Следовательно, на первом и втором этапах работы с теоремой формируются следующие компоненты ПУУД: *выделение и формулирование познавательной цели; осознанное построение речевого высказывания установление причинно-следственных связей; построение логической цепочки; выдвижение гипотез и их обоснование; постановка и решение проблемы.*

III этап – усвоение содержания теоремы, её структуры.

Целью данного этапа является изучение и усвоение содержания теоремы. Для достижения цели необходимо проводить работу по выделению из формулировки условия и заключения. Условие теоремы - некоторый предикат $A(x)$ заданный на множестве М, т.е. то, что дано в теореме; заключение теоремы — некоторый предикат $B(x)$ заданный на том же множестве М, т.е. то, что нужно доказать в теореме [10].

Для обучения выделять из формулировки теоремы условие и заключение используются соответствующие упражнения [10, 11]:

1. Выясните, какой вид имеет формулировка теоремы, и выделите в ней условие и заключение, запишите их отдельными предложениями.
2. Сформулируйте теорему в условной форме (если теорема сформулирована в категорической форме).
3. Уточните условие и заключение, т.е. выясните, о каких фигурах идет речь, сколько их, какие свойства фигуры указаны.
4. Выполните краткую запись условия и заключения. Проверьте, все ли посылки условия вошли в краткую запись.
5. Определите вид теоремы. Выясните, какую логическую структуру имеет теорема.

Виды теорем:

1) $(\forall x \in M)\left(A(x) => B(x)\right)$ — прямая теорема;

2) $(\forall x \in M)\left(B(x) => A(x)\right)$— обратная теорема;

3) $(\forall x \in M)\left(\overline{A(x)} => \overline{B(x)}\right)$ — противоположная теорема;

4) $(\forall x \in M)\left(\overline{B(x)} => \overline{A(x)}\right)$ — теорема, обратная противоположной.

Логическая структура теоремы	
Конъюнктивная	Дизъюнктивная
$(\forall x \in M)\left(A_1(x) \wedge A_2(x) => B(x)\right)$	$(\forall x \in M)\left(A_1(x) \vee A_2(x) => B(x)\right)$
$(\forall x \in M)\left(A(x) => B_1(x) \wedge B_2(x)\right)$	$(\forall x \in M)\left(A(x) => B_1(x) \vee B_2(x)\right)$
Знак ∧ - логическая связка «и», «а», «но», «причем», «также».	Знак ∨ - логическая связка «или», «либо».

6. Сформулируйте обратное утверждение. Является ли оно теоремой?

Параллельно с выяснением условия и заключения теоремы для достижения цели данного этапа необходимо выполнять упражнения на вычленение на чертежах и моделях таких фигур, которые удовлетворяли бы условию теоремы; на выполнение чертежа, моделирующего условие и заключение теоремы [10].

Кроме указанных упражнений, для сознательного усвоения формулировки теоремы можно применять следующие приемы [10]:

1. Предлагать обучающимся неполные или некорректные формулировки, в которых они должны найти ошибки.

2. Предлагать обучающимся задания, требующие нестандартного использования условия теоремы.

Можно сделать вывод, что на данном этапе обучающиеся внимательно читают формулировку теоремы с целью выделения из неё условия и заключения теоремы, разделяют на части, характеризуют каждую из частей, выделяют логическую структуру. Кроме того, при работе с краткой записью теоремы обучающиеся представляют информацию в виде схемы, устанавливают связи между частями теоремы. В процессе работы над чертежом обучающиеся выделяют существеннее характеристики объекта, которые удовлетворяли бы условию теоремы, моделируют при помощи чертежа условие теоремы. Следовательно, на третьем этапе работы с теоремой формируются следующие компоненты ПУУД: *смысловое чтение; структурирование знаний; знаково-символические действия; анализ объектов.*

IV этап – запоминание формулировки теоремы.

На данном этапе в целях облегчения запоминания формулировок теорем целесообразно поэлементное усвоение содержания теоремы. Для этого формулировка теоремы разбивается на отдельные элементы (в тексте элементы отделяются вертикальной чертой). После разбиения формулировки выполняются упражнения на распознавание ситуаций, удовлетворяющих условию теоремы, с последовательным использованием каждого элемента [29].

Таким образом, в процессе работы на данном этапе, обучающиеся читают формулировку теоремы с целью разделения её на отдельные элементы. При выполнении упражнений обучающиеся извлекают необходимую информацию из прослушанной/прочитанной формулировки, строят осознанное речевое высказывание; кроме того устанавливают наличие у объектов, данных в упражнении, существенных признаков, отраженных в каждом элементе формулировки. Следовательно, на четвертом этапе работы с теоремой формируются следующие компоненты ПУУД: *осознанное построение речевого высказывания; смысловое чтение, работа с текстом; подведение под понятие, выведение следствий.*

V этап - ознакомление со способом доказательства.

Работа на данном этапе связана с поиском способа доказательства теоремы. Методами доказательства, которые чаще всего встречаются в школьном курсе математики, являются синтетический, аналитический (нисходящий и восходящий анализ) методы, метод от противного.

Сущность метода от противного заключается в следующем: доказательство теоремы начинают с предположения, что $\left(A(x) => \overline{B(x)}\right)$, далее из данного утверждения $\overline{B(x)}$ выводят следствия до тех пор, пока не получат следствие $B_n(x)$, находящееся в противоречии либо с условием теоремы, либо с ранее доказанным теоретическим фактом.

При синтетическом методе доказательства теоремы цепочка рассуждений строится так, что мысль движется от условия теоремы к её заключению.

При аналитическом методе доказательства теоремы цепочка рассуждений строится так, что мысль движется от заключения теоремы к её условию. Различают два вида аналитического метода: восходящий анализ и нисходящий анализ. При восходящем анализе, отталкиваясь от заключения, подбирают для него достаточное условие. Таким образом, восходящий анализ определяется следующим рассуждением: "для того, чтобы было верно $\mathrm{B(x)}$, достаточно, что бы было верно $\mathrm{B_1(x)}$, и т.д." При нисходящем анализе, отталкиваясь от заключения, подбирают для него необходимые условия [10].

С целью поиска способа доказательства теоремы используются следующие методические приемы [11]:

1. Решение математической задачи, близкой по методу решения к данной теореме, или доказательство леммы, «наводящих» на метод доказательства новой теоремы.

2. Выполнение практической или лабораторной работы, в ходе которой «открывается» метод доказательства новой теоремы.

3. Повторение ранее изученных теорем, каким-либо образом связанных с данной теоремой и методов их доказательства.

4. Использование общего приема поиска доказательства, например, посредством использования нисходящего анализа.

5. Составление на основе поиска плана (схемы) доказательства.

Возможно также использование следующих эвристических приемов для поиска способа доказательства: аналогии, обобщения, приема опорных задач, приема достраивания фигуры, введения нового неизвестного, разбиения задачи на подзадачи, установление «родственных отношений» между объектами и т. д.

На данном этапе обучающиеся выполняют поиск и выделение информации необходимой для доказательства теоремы. В зависимости от теоремы, её структуры обучающиеся (совместно с учителем или самостоятельно) определяют наиболее простой способ доказательства. При построении плана обучающиеся строят логическую цепочку доказательства, представляют её в виде схемы (плана), делают выводы и также строят осознанное речевое высказывание. Следовательно, на пятом этапе работы с теоремой формируются следующие компоненты ПУУД: *поиск и выделение необходимой информации, структурирование знаний; выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий; осознанное построение речевого высказывания; построение логической цепочки.*

VI этап – доказательство теоремы.

Работа на данном этапе связана с непосредственным доказательством теоремы, осуществлением плана доказательства, найденного на предыдущем этапе, оформлением доказательства. Это осуществляется с помощью следующих методических приемов [11]:

1) выделение всех этапов доказательства согласно составленному плану (схеме или методу) доказательства;

2) правильная реализация приемов поиска доказательства, которые на этом этапе стали приемами доказательства;

3) логическое обоснование отдельных умозаключений в цепочке доказательства;

4) проверка правильности использования символики и других записей.

Важным на данном этапе является отработка умения делать запись доказательства, с обоснованием каждого шага. Возможны две формы записи доказательства теоремы. Одна из них состоит в том, что вначале записывается полученный вывод и здесь же в строчку записываются аргументы, на основе которых он был сделан. Другая форма записи предполагает заполнение таблицы [10].

Например, доказательство теоремы «Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия» может быть оформлено в виде следующей таблицы:

Шаги доказательства	Обоснование шагов доказательства
1) $\angle A = \angle A_1$	У подобных треугольников соответсвтенные углы равны
2) $\frac{S}{S_1} = k^2$	По теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу
3) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$	Из подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$
4) $\frac{AB}{A_1B_1} = k, \frac{AC}{A_1C_1} = k$	По свойству транзитивности равенств
5) $\frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = k^2$	По свосту верных равенств
6) $\frac{S}{S_1} = k^2$	По свойству транзитивности равенств

Таким образом, на данном этапе обучающиеся выполняют доказательство теоремы, устанавливают причинно-следственные связи (определяют истинность логических суждений по заданным исходным условиям, оформляют высказывание связывающее причину и следствие и т.д.), строят логическую цепочку рассуждений (разделяют рассуждение на основные компоненты, устанавливают связи между ними и располагают их в определенной последовательности). Кроме того, обучающиеся выполняют запись теоремы, т.е. строят осознанное речевое высказывание в письменной форме, или представляют информацию в виде таблицы. Следовательно, на шестом этапе работы с теоремой формируются следующие компоненты ПУУД: *установление причинно-следственных связей; построение логической цепочки рассуждений; доказательство; осознанное построение речевого высказывания в письменной форме; структурирование знаний.*

VII этап – применение теоремы.

Работа на данном этапе осуществляется в два подэтапа. Сначала осуществляется закрепление доказательства теоремы, целью которого является повторение формулировки теоремы, идеи и способа доказательства. Для достижения цели можно использовать следующие задания [10, 29]:

1. Сформулировать теорему. Какие понятия используются в формулировке теоремы?
2. Назовите теоремы, которые использовались при доказательстве теоремы. Какова цель их использования?
3. На какой теоретический материал, кроме теорем, опирались при доказательстве?
4. Выделите идею доказательства, основные этапы доказательства.
5. На индивидуальных карточках, или на доске, готовится запись доказательства теоремы только в виде выводов, без соответствующей аргументации. Обучающимся предлагается привести большую и меньшую посылку для каждого вывода.
6. Обучающимся может быть предложена карточка с доказательством только что разобранной теоремы, в которой присутствуют пропуски. Обучающиеся должны заполнить эти пропуски.

После закрепления доказательства теоремы переходят ко второму подэтапу, который связан с формированием у обучающихся умений и навыков по применению теоремы к решению задач, т.е. к закреплению теоремы.

Задачи, к которым применима отрабатываемая теорема, должны быть разнообразны как по содержанию, так и по методам решения. Сначала для отработки теоремы обучающимся следует предлагать алгоритмические задачи, решение которых предполагает непосредственное применение теоремы. Затем для отработки теоремы обучающимся должны быть предложены задачи полуалгоритмического и эвристического характера [10].

Также для закрепления теоремы полезны задачи, имеющие прикладной характер. Например, для отработки признаков подобия треугольников можно предложить такую задачу: «Земельный участок имеет форму треугольника со сторонами 50, 60 и 70 м, а соответствующие стороны на плане равны 5,6 и 7,5 см. Верно ли начерчен план?»[10].

Следовательно, на данном этапе обучающиеся в процессе закрепление доказательства теоремы и её применения строят осознанное речевое высказывание в устной и письменной форме. При закреплении доказательства теоремы производят осмысление способа доказательства, его основной идеи, последовательности рассуждений, а также основных теоретических фактов, используемых при доказательстве. При решении задач обучающиеся выбирают наиболее эффективные способы решения в зависимости от изученной теоремы; производят доказательство (при решении соответствующих задач); устанавливают причинно-следственные связи между условием и вопросом задачи, получают информацию из чертежа; устанавливают связи между фигурой, заданной в условии задачи, и его элементами, определяют недостаточную для решения задачи информации. Также при решении задач, имеющих прикладной характер, обучающиеся выделяют существенные характеристики объекта и строят модель, к которой можно будут применить изученную теорему. Таким образом, на седьмом этапе работы с теоремой формируются следующие компоненты ПУУД: *осознанное речевое высказывание в устной и письменной форме; выбор наиболее эффективных способов решения задач; рефлексия способов и условий действия; знаково-символические действия; анализ объектов; установление причинно-следственных связей; построение логической цепочки рассуждении; доказательство; постановка и решение проблемы.*

VIII этап – установление связи с другими теоремами.

Работа на данной этапе связана с выполнением упражнений на установление связей между изученными теоремами, на усвоение системы теорем. Эти связи выясняются как путем анализа учебного материала, так и путем анализа самого доказательства. Полезно составление «родословной» доказательства теоремы (сводя используемые предложения к аксиомам), использование упражнений на группирование теорем по приемам их доказательства [29]. Следовательно, на седьмом этапе работы с теоремой формируются следующие компоненты ПУУД: *анализ объектов с целью выделения признаков; синтез; сравнение, сериация и классификация объектов.*

Важно отметить, что в зависимости от конкретного содержания теоремы, опыта обучающихся отдельные этапы могут опускаться. Так, при изучении теоремы, формулировка которой достаточно проста, может отсутствовать, например, этап усвоения условия и заключения теоремы.

Проанализировав методику работы на каждом этапе решения задачи, можно установить соответствие между этапами и формируемыми на них познавательными УУД. Указанное соответствие представлено на схеме (см. рис. 1).

Можно сделать вывод, что в процессе решения задач возможно полноценное формирование всех компонентов ПУУД, что делает решение задач важным и значимым для достижения современных результатов обучения.

Рис. 1. *Сопоставление этапов изучения теоремы с формируемыми познавательными универсальными учебными действиями*

2.2. Требования к отбору и конструированию задач на доказательство, направленных на формирование познавательных УУД обучающихся 7-9 классов

Учителю необходимо уметь отбирать и составлять задачи на доказательство для обучающихся 7-9 классов, которые направлены на формирование познавательных универсальных учебных действий.

Учитывая уровень сформированности познавательных УУД в начальной школе нужно отметить, что обучающиеся средних классов на начальном уровне владеют такими умениями, как:

- общеучебные (самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели, поиск и выделение необходимой информации, выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий и т.д.);
- логические (анализ, синтез, установление причинно-следственных связей и т.д.);
- действия постановки и решения проблемы (формулирование проблемы; самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера).

На уроках математики у обучающихся данной возрастной группы отмечаются умения выделять типы задач и способы их решения. Обучающиеся успешно справляются с предложенными задачами, в которых необходимо найти схему, отображающую логические отношения между известными данными и искомыми. Таким образом, на уроках наблюдается не только умение обучающихся достигать конкретных результатов, но и их умение установить логические отношения между данными и искомыми.

Обучение решению задач на доказательство – одна из основных целей преподавания геометрии в школе. Начинать это обучение желательно с самого начала изучения систематического курса геометрии. Для этого необходима серия тренировочных задач на доказательство, решение которых состоит из одного или двух шагов.

Даже решение задач на непосредственное применение изученных свойств и теорем требует выработки определенных навыков. Нужно уметь выбрать нужное свойство или теорему, необходимую для использования при решении задачи; проверить выполнимость всех условий; провести дополнительные построения; сделать выводы.

Решение этих задач позволяет лучше освоить теоретический материал и научиться применять его при решении задач. Оно не только способствует выработке соответствующих умений и навыков, но, что более важно, развивает логическое мышление, учит рассуждать, анализировать, аргументировать, обосновывать, доказывать.

Сущность обучения решению задач на доказательство сводится к обучению поиска ответов на три основных вопроса: «зачем надо доказывать?», «что надо доказывать?», «как надо доказывать?».

Ответ на первый вопрос обусловлен мотивационным компонентом деятельности, который обеспечивается действиями целеполагания и мотивации. Второй вопрос актуализирует действия анализа теоремы - выделение условия, заключения теоремы, объектов, отношений между ними, построение графической модели ситуации, отраженной в теореме. С данным вопросом соотносится и открытие доказываемых фактов, что обеспечивается владением и различными эвристиками. Ответ на третий вопрос предполагает поиск метода доказательства, его соотнесение с доказываемым утверждением, прогнозирование результатов использования метода, нахождение других методов доказательства, выбор наиболее оптимального из них и т. д.

Таким образом, процесс доказательства должен дать ответы на три сформулированных вопроса, поиск ответов на которые должен осуществляться поэтапно и последовательно. Кроме того, процесс работы над задачей (теоремой) должен быть организован в рамках деятельностного подхода, который является основой ФГОС. Применение деятельностного подхода предполагает выстраивание деятельности, адекватной знаниям и составляемой мотивационной сферой, различного рода действиями, способами деятельности, контролем и самоконтролем.

Структура формулировки задач на доказательство:

- ✓ условие — это указание тех свойств объектов, принимаемых за истинные, которые даны;
- ✓ заключение — указание тех свойств, наличие которых нужно доказать;
- ✓ разъяснительная часть, в которой даются названия объектов, рассматриваемых в данной задаче (теореме).

Структура доказательства:

Тезис – суждение, истинность которого доказывается.

Аргументы доказательства – суждения, истинность которых установлена и из которых необходимо следует истинность доказываемого тезиса (определения понятий, аксиомы, постулаты, теоремы, общие законы науки).

Демонстрация – логический процесс взаимосвязи суждений, при котором осуществляется переход от аргументов к тезису.

Требования к элементам доказательства:

Тезис:

- ➢ сформулирован ясно, точно, определенно и непротиворечиво;
- ➢ остается неизменным на протяжении всего доказательства или заменяется только равносильным суждением;
- ➢ не должен находиться в противоречии с доказанными ранее суждениями.

Аргументы:

- ➢ аргумент должен быть истинным;
- ➢ истинность аргумента должна быть доказана независимо от тезиса;
- ➢ аргументы должны быть непротиворечивыми.

Демонстрация:

- полнота демонстрации;
- построение по правилам вывода.

Деятельность обучающихся по решению геометрических задач на доказательство можно организовать так, чтобы целенаправленно формировались познавательные логические УУД. Наиболее широкими возможностями в этом плане обладают задачи повышенной сложности. Сложность может быть обусловлена:

− большим, по сравнению с типичными задачами, количеством действий по ее решению;

− нетипичными изложением условия или постановкой вопроса, которые требуют от учащихся переформулировки для решения задачи;

− необходимостью комбинации различных способов решения ;

− необходимостью использования других (внешних или внутренних) источников данных для решения задачи.

Трудность задачи может быть обусловлена:

− неизвестностью для обучающихся способа решения задачи и необходимостью осуществить его поиск;

− необходимостью осуществить более глубокий анализ содержания задачи, чем обычно ;

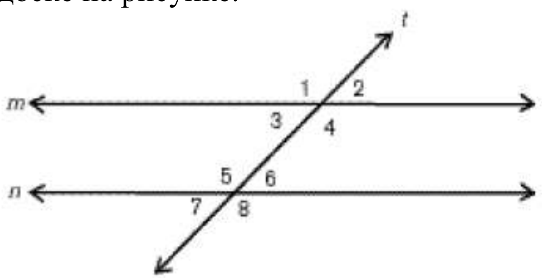
− необходимостью выполнения прогнозирования, задействования критического мышления и т.п., то есть тех действий, которые при решении типичных задач не используются.

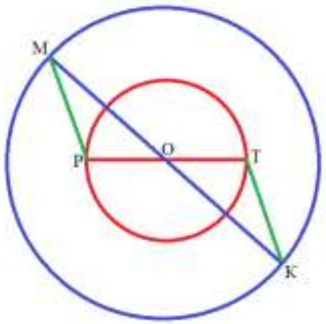
В сфере познавательных универсальных учебных действий обучающиеся научатся воспринимать и анализировать сообщения и важнейшие их компоненты – тексты и чертежи, использовать знаково-символические средства, в том числе овладеют действием моделирования, а также широким спектром логических действий и операций.

2.3. Пример организации работы над решением задач на доказательство (доказательством теоремы), направленной на формирование познавательных универсальных действий обучающихся

Конспект урока по геометрии по теме «Решение задач по теоремам о параллельных прямых»

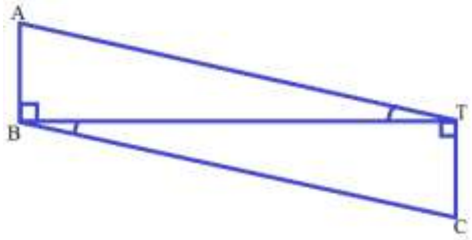
Тема урока	«Решение задач по теоремам о параллельных прямых»
Цель урока	Формировать навыки решения задач на доказательство на основе теорем о параллельных прямых. Развивать активность учащихся, в обсуждение поставленной задачи. Развивать общение ученик-ученик, ученик-учитель.
Планируемые результаты обучения	Личностные: умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию.
	Предметные: повторение основных положений по теме: «Параллельные прямые»; закрепление навыков в решении задач по данной теме.
	Метапредметные: формирование компонентов познавательных УУД.
Используемые ТСО	Интерактивная доска, компьютер.

Этап (ход) урока	**Деятельность учителя**	**Деятельность обучающихся**	**Формируемые ПУУД**
1.Организационный момент	*Здравствуйте ребята! Сегодня мы продолжаем с вами тему «Параллельные прямые». Цель сегодняшнего урока: совершенствовать навыки в решении задач по данной теме.*	Обучающиеся приветствуют учителя, проверяют готовность к уроку, записывают цель.	
2. Актуализация знаний	Фронтальный опрос: 1. Какие прямые называются параллельными? 2. Назовите пары углов, изображенных на доске на рисунке.  *В каком случае прямые параллельны?*	Отвечают на вопросы: 1. Две прямые называются параллельными, если они не пересекаются. 2. 4 и 5; 3 и 6 – внутренние накрест лежащие углы; 3 и 5; 4 и 6 – внутренние односторонние углы; 1 и 5; 2 и 6; 3 и 7; 4 и 8 – соответственные углы; 1 и 8; 2 и 7 – внешние накрест лежащие углы. Устно формулируют изученные ранее	

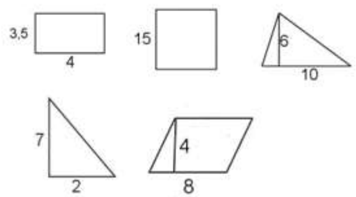
	Сформулируйте теоремы о параллельности прямых.	теоремы: **Теорема 1.** Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны. **Теорема 2**. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны. **Теорема 3**. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма внутренних односторонних углов равна 180 градусов.	
3. Решение задач I. Этап. Мотивация изучения теоремы	На доске представлена задача и рисунок. **Задача 1.** Отрезки МК и РТ являются диаметром двух окружностей с общим центром О. Докажите, что прямые МР и ТК параллельны.  Задает вопросы обучающимся: - *Внимательно прочитать условие задачи и рассмотреть рисунок.* - *Что такое окружность? Что такое радиус окружности? Что такое диаметр окружности?*	Обучающиеся знакомятся с условием задачи, изучают рисунок, выполненный учителем на доске в приложении Geogebra. Выделяют из условия необходимые данные, чертят рисунок в тетрадях, выделяя объекты разных фигур разными цветами. Переносят данные в свои тетради, отвечают на вопросы.	• смысловое чтение; • осознанное и произвольное построение речевого высказывания в устной и письменной форме; • структурирование знаний; • знаково-символические действия; • анализ объектов. • осознанное и произвольное построение речевого высказывания в устной форме; • анализ; • установление причинно - следственных связей; • построение логической цепочки рассуждений.
II. Этап. Ознакомление с фактом,	1. Для того, чтобы доказать параллельность двух прямых, какие условия нам необходимы? 2. Что за фигуры изображены на доске?	На данном этапе обучающиеся вспоминают ранее изученные признаки параллельности прямых. Делают вывод, что необходимо	

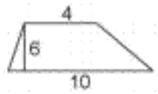
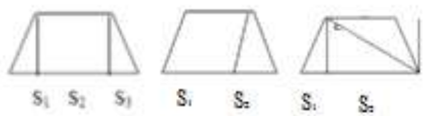
отраженным в теореме	Дает обучающимся задание самостоятельно подумать и предположить, с помощью чего можно доказать параллельность данных прямых.	доказать что накрест лежащие углы равны, чтобы доказать параллельность данных прямых. При выдвижении гипотезы обучающиеся включаются в обсуждение, в ходе которого строят осознанное речевое высказывание. Также в процессе работы условно разделяют весь рисунок на части, выделяют, что на рисунке присутствуют 2 окружности и 2 треугольника, а также, что две стороны каждого треугольника являются радиусом окружностей, а значит эти стороны попарно равны. В связи с этим, обучающиеся выдвигают и формулируют предположение о том, что треугольники МРО и КТО равны и с помощью этого можно доказать параллельность прямых.	
III – IV этапы опускаются. V. Этап. Ознакомление со способом доказательства.	Задает обучающимся наводящие вопросы, движение от искомых (аналитический метод): - *Что нам нужно доказать?* - *Какое условие необходимо для этого?* - *Когда эти углы будут равны?*	Отвечают на вопросы, определяют наиболее простой способ решения. При построении плана строят логическую цепочку рассуждений. Исходя из того, что нужно доказать параллельность двух прямых, выделяют, что нужно чтобы $\llcorner$МРО = $\llcorner$КТО либо $\llcorner$ОМР = $\llcorner$ОТК. Делают вывод, что достаточно доказать, что ΔМРО = ΔКТО, для того чтобы доказать, что МР ‖ ТК.	• осознанное построение речевого высказывания в устной форме; • выбор наиболее эффективных способов решения задач, в зависимости от конкретных условий; • построение логической цепочки рассуждений.
VI. Этап. Доказательство теоремы.	Помогает обучающемуся, работающему у доски, оформить доказательство.	На данном этапе обучающиеся разделяют рассуждение на основные компоненты, устанавливают связи между ними и располагают их в определенной последовательности. Записывают	• осознанное построение речевого высказывания в письменной форме; • установление

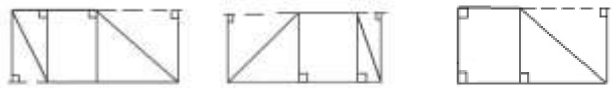
		доказательство, один обучающийся работает у доски. **Дано:** *MO = OK; PO = OT.* **Доказать:** *MP || TK.* **Доказательство:** *Рассмотрим ΔMOT и ΔKOP:* *OP = OT - радиусы малой окружности;* *OM = OK - радиусы большой окружности;* *∟MOT = ∟KOP – вертикальные.* *Следовательно, ΔMOT = ΔKOP по двум сторонам и углу между ними. Соответственно ∟OMP = ∟OTK, а они внутренне накрест лежащие при прямых MP и TK и секущей MK. По теореме 1 о параллельных прямых MP || TK.*	причинно-следственных связей; ● построение логической цепочки рассуждений; ● доказательство.
VII. Этап. Применение теоремы.	**На экране представлена задача.** **Задача 3.** Отрезок AB⊥BT, CT⊥BT, точки A и C лежат по разные стороны от прямой BT. Доказать, что BC || AT, если AB = CT. Учитель дает задание самостоятельно проанализировать условие задачи и построить рисунок, одного обучающегося вызывает к доске. Используя теоремы о параллельности прямых, а также ранее решенную задачу, построить план решения для данной задачи и оформить доказательство.	Читают условие задачи, один обучающийся на интерактивной доске, в приложении Geogebra самостоятельно выполняет рисунок, остальные в тетрадях. При решении задачи обучающиеся выбирают наиболее эффективные способы решения; устанавливают причинно-следственные связи между условием и вопросом задачи. Выделяют необходимые данные, ищут пути решения задачи, строят логическую цепочку рассуждений; производят доказательство.	● смысловое чтение; ● знаково-символические действия; ● анализ объектов; ● осознанное построение речевого высказывания в письменной форме; ● доказательство; ● постановка и решение проблемы.

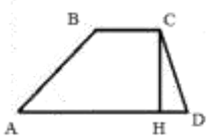
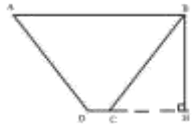
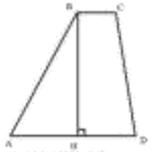
		 **Дано**: AB⊥BT, CT⊥BT и AB = CT. **Доказать:** AT ‖ BC. **Доказательство:** Рассмотрим ΔABT и ΔCTB: BT – общая сторона, AB = CT - по условию, AB⊥BT и CT⊥BT⇒ ∟ABT = ∟CTB ⇒ ⇒Δ ABT = ΔCTB (по двум сторонам и углу между ними)⇒ ∟ATB = ∟CBT, а это внутренние накрест лежащие углы, при прямых AT и BC, и секущей BT. Тогда, по теореме о параллельных прямых AT ‖ BC.	
5. Подведение итогов урока	**Рефлексия** 1. Чем вы сегодня занимались на уроке? 2. Постарайтесь в тетрадях закончить предложения, представленные на доске: ✓ Я на уроке узнал ……………………. ✓ Мне на уроке понравилось…………… ✓ Меня удивило, что…………………… Задает домашнее задание, ставит оценки за работу на уроке.	Отвечают на вопросы, подводят итоги.	

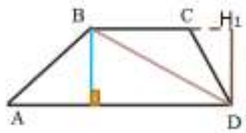
Конспект урока по геометрии по теме «Площадь трапеции»

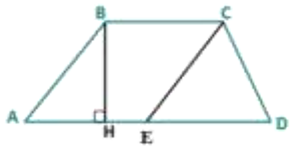
Тема урока	«Площадь трапеции»		
Цель урока	Формирование умения доказывать теорему о нахождении площади трапеции и применять её формулировку к решению задач		
Планируемые результаты обучения	Личностные: умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию.		
	Предметные: умение изображать трапецию, высоту трапеции; знание теоремы о площади трапеции; умение доказывать теорему; умение извлекать информацию о трапеции, представленную на чертежах; умение использовать формулу площади трапеции при решении задач.		
	Метапредметные: формирование компонентов познавательных УУД.		
Этап (ход) урока	**Деятельность учителя**	**Деятельность обучающихся**	**Формируемые ПУУД**
1.Организационный момент	Здравствуйте! Проверьте, все ли у вас готово к уроку: дневник, учебник, тетрадь, ручка, карандаш, линейка.	Обучающиеся приветствуют учителя, проверяют готовность к уроку.	
2. Актуализация знаний (подготовка к изучению нового материала)	Учитель задает вопросы классу (фронтальный опрос): 1. Какую тему мы изучаем? 2. Площади каких фигур Вы уже умеете находить? 3. Чему равна площадь прямоугольника, квадрата, треугольника, прямоугольного треугольника, параллелограмма? (Четырехугольники и формулы их площадей демонстрируются на слайдах). 4. Найдите, площади фигур, изображенных на доске (фронтальная работа по готовым чертежам): 	1. Тему «Площадь многоугольника» 2. Квадрата, прямоугольника, параллелограмма, треугольника (произвольного и прямоугольного). 3. $S_{пр} = ab$ $S_{кв} = a^2$ $S_{тр} = \frac{1}{2}ah$ $S_{пр.тр} = \frac{1}{2}ab$ $S_{пар-ма} = ah$ 4. $S_{пр} = 14$ $S_{кв} = 225$, $S_{тр} = 30$, $S_{пр.тр} = 7$,$S_{пар-ма} = 32$	

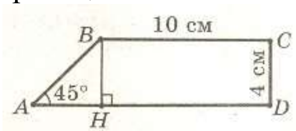
3.Изучение нового материала			
I этап – мотивация изучения теоремы	1. Что за фигура изображена на доске?  2. Что такое трапеция? 3. Как называются стороны трапеции? 4. Учитель вводит проблемную ситуацию: как найти площадь изображенной трапеции? 5. Сформулируйте возникшую проблему. Решением данной проблемы и займемся сегодня на уроке.	1. Трапеция 2. Трапеция – это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны. 3. Параллельные стороны называются - основаниями, а две другие – боковыми сторонами. 4. Мы не знаем формулу площади трапеции. 5. Найти формулу для нахождения площади трапеции.	• Постановка и проблемы; • выдвижение гипотезы; • установление причинно-следственных связей (умение находить главное в изучаемом объекте, кратко оформлять высказывание, связывающее причину и следствие); • самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели.
II этап – ознакомление с фактом, отраженным в теореме	1. Для того чтобы найти площадь изображенной трапеции, нужно воспользоваться уже известными знаниями. Как вы думаете, какими? 2. Скажите, если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то, как можно найти его площадь? 3. Откуда это следует? 4. Как тогда мы можем поступить, чтобы найти площадь трапеции? 5. Предлагаю выяснить, чему равна площадь трапеции практическим путем. Итак, у каждого из вас на столе лежат модели трапеции, в которой нижнее основание обозначим за a, нижнее за b и высоту трапеции за h. С помощью карандаша и линейки разбейте трапецию на 2-3 многоугольника, площади которых вы можете вычислить. Используя свойство площадей, найдите площадь трапеции. (Во время работы учитель оказывает помощь обучающимся, затем	1. Обучающиеся высказывают свои предположения. 2. Можно найти площадь каждого многоугольника. Площадь многоугольника будет равна сумме площадей этих многоугольников. 3. Из свойств площадей. 4. Разбить её на треугольники или четырехугольники и найти площадь каждого из них, используя уже известные формулы. 5. Обучающиеся выполняют работу: разбивают трапеции на части, выполняют необходимые измерения и вычисляют площади получившихся фигур. 6. Обучающиеся во всех случаях получили (результаты трёх самых распространенных записываются на доске): $S_{тр} = \frac{1}{2}(a+b)\,h$, где a и b– основания, h – высота. 	

<table>
<tr><td></td><td>достраивает на заранее приготовленных на доске чертежах трапеции самые распространенные разбиения необходимые для дальнейшей работы).
6. Подведём итоги: назовите ваши результаты: $S_{тр}= \dots$
7. Скажите, полученный нами результат будет справедлив для любой трапеции?
8. Сформулируйте предположение (гипотезу) о том, чему будет равна площадь трапеции.
9. Данная гипотеза, сформулированная в виде теоремы, требует обоснования и доказательства. Сформулируйте, чем мы займемся сегодня на уроке?</td><td>7. Обучающиеся высказывают свои предложения.
8. Обучающиеся формулируют предположение: площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту.
9. На уроке мы будем доказывать теорему о площади трапеции.</td><td></td></tr>
<tr><td>III этап – усвоение содержания теоремы, её структуры</td><td>1. Внимательно прочитайте сформулированную теорему. Выделите в ней условие и заключение.
2. Сформулируйте теорему в условной форме.
3. Выполните краткую запись условия и заключения. Проверьте, все ли посылки условия вошли в краткую запись.
4. Выполните все возможные варианты чертежей, моделирующие условие теоремы.
5. Определите, истинно или ложно данное утверждение: площадь трапеции равна произведению её средней линии на высоту.</td><td>1. Условие: трапеция. Заключение: площадь равна произведению полусуммы оснований на высоту.
2. Если четырехугольник является трапецией, то его площадь равна произведению полусуммы оснований на высоту.
3. $ABCD -$ трапеция, $S -$ площадь, $BC = a, AD = b, BH = h, => S_{тр} = \frac{1}{2}(a + b)\ h.$
4. Обучающиеся выполняют чертежи различных трапеций, с указанием различных высот.

5. Данное утверждение истинно, так как средняя линия равна полусумме оснований. Значит, первое слагаемое в формуле имеем право заменить на среднюю линию.</td><td>• Структурирование знаний (умение представлять информацию в виде схем);
• знаково-символические действия;
• анализ объектов;
• смысловое чтение (осмысление цели чтения; извлечение необходимой информации из прочитанной формулировки).</td></tr>
<tr><td>IV этап – запоминание</td><td>Внимательно прочитайте формулировку теоремы и отделите в ней вертикальной чертой отдельные элементы.</td><td>Площадь трапеции| равна произведению| полусуммы её оснований| на высоту.
Обучающиеся выполняют упражнение. Один из</td><td>• Смысловое чтение (осмысление цели чтения; извлечение</td></tr>
</table>

формулировки теоремы	Для лучшего запоминания формулировки теоремы выполним следующее упражнение: последовательно соотнесите каждый элемент формулировки с представленными чертежами и записями к ним. А)  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD+BC)\cdot CH$ Б)  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BH$ В)  $S_{ABCD} = (AD+BC)\cdot BH$	обучающихся читает каждый элемент формулировки и соотносит его с представленными записями, комментируя свои действия. А) Площадь S трапеции – данный четырехугольник трапеция, т.к. . $AD \parallel BC$, $AB \nparallel CD$. Площадь трапеции равна произведению; произведению полусуммы оснований на высоту. Б) Площадь S трапеции – данный четырехугольник трапеция, т.к. . $AD \parallel BC$, $AB \nparallel CD$. Площадь S трапеции равна произведению; произведению полусуммы боковых сторон – ошибка, так как для нахождения площади необходима полусумма оснований. Запись неверна. В) Площадь S трапеции – данный четырехугольник трапеция, т.к. . $AD \parallel BC$, $AB \nparallel CD$. Площадь трапеции равна произведению; произведению суммы оснований – ошибка, так как для нахождения площади необходима полусумма оснований. Запись неверна.	необходимой информации из прочитанной формулировки); • осознанное построение речевого высказывания; • подведение под понятие (умение устанавливать наличие у объекта существенных признаков, умение делать вывод о принадлежности объекта к данному понятию).
V этап – поиск способа доказательства теоремы.	Формулировку теоремы мы отработали. Дальнейшая наша деятельность связана с доказательством открытой нами теоремы. 1. Выполненная практическая работа позволила нам определить способ доказательства изучаемой теоремы. Вспомните, как мы доказывали предыдущие теоремы о площадях, и скажите, в чем состоит способ доказательства. 2. В процессе практической работы каждый из вас фактически доказал теорему своим способом. Давайте посмотрим на три выделенных разбиения. Каким разбиением удобнее пользоваться при доказательстве?	1. Способ доказательства состоит в разбиении трапеции на фигуры, площади которых нам известны, с помощь дополнительных построений. 2. Для доказательства удобнее пользоваться третьим случаем, когда трапеция разбивается на два треугольника. Т.к. во втором случае нужно будет доказывать, что мы разбили трапецию на треугольник и параллелограмм, а в первом необходимо будет искать площадь трех треугольников, что не очень удобно. 3. Провели диагональ BD. 4. Провели высоту DH_1. Затем вычислили площадь каждого из получившихся треугольников, и получили формулу площади трапеции.	• Поиск и выделение необходимой информации (умение определять, какие знания необходимы для решения задачи); • структурирование знаний (умение представлять информацию в виде схемы); • осознанное построение речевого высказывания;

	Ответ поясните. 3. Итак, какое дополнительное построение мы выполнили, чтобы получить два треугольника. 4. Что вы делали дальше? 5. Скажите, можем ли мы утверждать, что высоты трапеции равны? Обратите внимание на четырехугольник $BHDH_1$. Откуда будет следовать равенство BH и DH_1? 6. Давайте составим план доказательства, т.е. запишем все шаги, которые необходимо выполнить для доказательства данного утверждения. 7. Чтобы доказать теорему, какие уже ранее изученные свойства, теоремы вам необходимы?	5. Нет, это требует дополнительного обоснования. $BHDH_1$ – прямоугольник. Следовательно, $BH=DH_1$. 6. 1) Провести диагональ BD, $S=S_{ABD}+S_{BCD}$.; 2) Найти площадь ΔABD; 3) Провести вторую высоту трапеции DH_1 найти площадь ΔBCD; 4) Доказать: $BH=DH_1$ 5) Найти площадь трапеции. 7. Свойства площадей, формула площади треугольника, свойства прямоугольника.	• выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий; • построение логической цепочки рассуждений.
VI этап – доказательство теоремы.	Дает задание оформить составленный план в строгое доказательство. Записать, что дано и что нужно доказать, сделать чертеж. Затем прописать каждый шаг доказательства с обоснованием.	Обучающиеся записывают, что дано и что нужно доказать, выполняют чертеж, и оформляют доказательство. Дано: ABCD – трапеция, AD и BC – основания, BH – высота, S – площадь трапеции.  Доказать: $S=\frac{1}{2}(AD+BC)BH.$ Доказательство: 1. Проведем диагональ BD. По свойствам площадей $S=S_{ABD}+S_{BCD}$. 2. $S_{ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BH.$ 3. Проведем вторую высоту трапеции DH_1. $S_{BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot DH_1$. 4. Т.к. $HBDH_1$- прямоугольник, то $BH=DH_1$.	• Осознанное построение речевого высказывания в письменной форме; • установление причинно-следственных связей (умение определять истинность логических суждений по заданным исходным условиям); • построение логической цепочки рассуждений; • доказательство

		5. $S=\frac{1}{2}AD\cdot BH++\frac{1}{2}BC\cdot DH_1=\frac{1}{2}AD\cdot BH+\frac{1}{2}BC\cdot BH=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BH.$	
4.Закрепеление нового материала			
VII этап – применение теоремы	Итак, давайте снова посмотрим на наше доказательство, закрепим его. 1. Сформулируйте теорему. 2. Выделите идею доказательства, основные этапы доказательства. 3. На индивидуальных карточках записано доказательство теоремы, но с использованием другого разбиения трапеции на части. Восстановите пропуски в доказательстве. Дано: ABCD – трапеция, AD и BC – основания, BH – высота, S – площадь трапеции. Доказать: $S=\frac{1}{2}(AD+BC)BH.$  Доказательство: 1. Проведем CE‖AB. По свойствам площадей S = ______________. 2. Т.к. BC‖_______, AB‖CE, то ABCE - ___________. Тогда S_{ABCE} = _________. 3. Проведем вторую высоту трапеции CH_1. S_{ECD} = _____________. 4. Т.к. HB CH_1 - прямоугольник, то ______________. 5. AE=_____, ED = AD-___. S = _________________ $=BC\cdot$ __ $+\frac{1}{2}(AD-$ __ $)\cdot BH=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BH.$ 4. Доказательство теоремы мы изучили,	1. Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту. 2. Основная идея доказательства заключается в том, что мы разбивали трапецию на фигуры, площади которых известны. Затем находили площадь каждой фигуры и, используя свойство площадей, нашли площадь трапеции. 3. Обучающиеся выполняют задание на индивидуальных карточках. Доказательство: 1. Проведем CE‖AB. По свойствам площадей $S=S_{ABCE}+S_{ECD}$. 2. Т.к. BC‖AH, AB‖CE, то ABCE - параллелограмм. Тогда $S_{ABCE}=AE\cdot BH.$ 3. Проведем вторую высоту трапеции CH_1. $S_{ECD}=\frac{1}{2}ED\cdot CH_1$ 4. Т.к. $HBCH_1$- прямоугольник, то $BH=CH_1$. 5. AE=BC, ED = AD-AE. $S=AE\cdot BH+\frac{1}{2}ED\cdot CH_1=BC\cdot BH+\frac{1}{2}(AD-BC)\cdot BH=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BH.$ 4. $S=\frac{1}{2}(10+4)6=42.$ 5. Обучающийся выходит к доске, записывает формулу для нахождения площади трапеции. Выполняет решение, комментируя свои действия. 1) $S=\frac{1}{2}(AD+BC)BH$	• Осознанное построение речевого высказывания в устной и письменной форме; • выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий; • знаково-символические действия; • анализ объектов; • установление причинно-следственных связей; • построение логической цепочки рассуждений; • доказательство • постановка и решение проблемы (умение определять недостаточную для решения задачи информацию).

	перейдем теперь к решению задач. Давайте вернемся к задаче, которую мы не смогли решить в начале урока. Нужно было найти площадь изображенной трапеции. Теперь вы сможете найти площадь. Чему она равна? 5. Решим еще несколько задач на применение формулы: 1) Найдите площадь трапеции, если основания равны 6 см и 8 см, а высота 4 см. 2) Площадь трапеции равна 25 см², а ее высота 5 см. Чему равна сумма оснований? 6. Усложним задание. Найдите площадь трапеции.  1) Что нам известно? Что неизвестно? 2) Для того чтобы найти площадь трапеции, что необходимо знать ещё? 3) Как найти нижнее основание? 4) Чему равен отрезок HD? Откуда это следует? 5) Как найти длину отрезка AH? 6) Каким является ΔAHB? И что из этого следует? 7) Чему тогда равна площадь трапеции? 7. Найти площадь трапеции со сторонами оснований 10 см, 20 см и боковыми сторонами 6 см и 8 см. Поясните свой выбор способа решения. 8. Вычисление площади трапеции необходимо и при решении практических задач.	$S = \frac{1}{2}(6 + 8)4 = 28\ см^2$. 2) $25 = \frac{1}{2}(AD + BC)5$ $50 = (AD + BC)10$ $AD + BC = 10\ см$ 6.Обучающиеся отвечают на вопросы учителя и один из них решает задачу на доске: 1) Известно верхнее основание оно равно 10 и высота равна 4; 2) нижнее основание; 3) нижнее основание это сумма отрезка AH и HD; 4) HD=BC=10 см, т.к. BCDH – прямоугольник; 5) Из прямоугольного треугольника AHB; 6) ΔAHB – равнобедренный, т.к. углы при основании равны по 45^0. Тогда BH=AH, BH=CD=4 см, т.к. BCDH – прямоугольник. Тогда AH= 4 см. Значит AD=14; 7) $S = \frac{1}{2}(14 + 10)4 = 48 см^2$. 7. Обучающиеся решают задачу. Несколько человек выходят к доске, демонстрируют свое решение и комментируют его. 8.Обучающиеся отвечают на вопросы учителя и один из них решает задачу на доске: 1) нужно найти площадь трапеции; 2) нет, нам неизвестна высота; 3) Из прямоугольного треугольника. В нем катет, лежащий против угла в 30^0 будет равен половине гипотенузы. Значит высота трапеции равна 2 м. 4) $S = \frac{1}{2}(7{,}4 + 2{,}6)2 = 10 м^2$. 5) 10*20=200 г.	

	Рассмотрим одну из них. Задача: на 1 $м^2$ необходимо 20 г семян. Количество клумб в сквере 5. Каждая клумба имеет форму трапеции со следующими размерами: нижнее основание – 7,4 м, верхнее – 2,6, боковая сторона равна 4 м и прилежащий к ней острый угол равен 30^0. Сколько грамм декоративной травы необходимо для засева всех клумб? 1) Чтобы решить данную задачу, что мы должны найти? 2) Для нахождения площади нам известны все данные? 3) Как найти высоту данной трапеции? 4) Чему тогда равна площадь трапеции? 5) Сколько грамм декоративной травы необходимо?		
VIII этап – установление связей теоремы с ранее изученными	1. Что объединяет данную теорему с ранее изученными? 2. Выполните классификацию всех изученных вами формул в зависимости от количества элементов в ней; в зависимости от сложности вывода. 3. Установите связь между изученными теоремами. Составьте логическую цепочку их появления. Поясните, как каждая теорема связана с предыдущей и последующей.	1. Для их доказательства используется идея разбиения фигуры на части с помощью дополнительных построений. 2. Классификация в зависимости от количества элементов в формуле: Только стороны: квадрат, прямоугольник; Основание и высота: параллелограмм, треугольник; Основания и высота: трапеция. 3. $S_{кв} \to S_{пр.} \to S_{пар-ма} \to S_{треуг.} \to S_{тр}$ Обучающиеся составляют цепочку и поясняют свое решение.	• Анализ объектов; • Синтез (умение объединять элементы по заданному основанию); • выбор критериев для сравнения, сериации и классификации объектов (умение распределять элементы по заданному критерию).

5.Подведение итогов урока	**Рефлексия** 1. Чем вы сегодня занимались на уроке? 2. Постарайтесь закончить предложение: «Сегодня на уроке я узнал… «; «Сегодня мне удалось…»; «Я понял, что…"; «Теперь я могу…»; «Я научился…»; «У меня получилось…»	Отвечают на вопросы, подводят итоги.	

ВЫВОДЫ ПО 2 ГЛАВЕ

Обучение с использованием задач на доказательство, направленных на формирование познавательных УУД приводит к более прочному усвоению информации.

Процесс решения задач, направленных на формирование познавательных УУД вызывают повышенный интерес обучающихся, способствуют развитию творческой активности, любознательности. Школьников захватывает сам процесс поиска путей решения задач. Они получают возможность развивать ассоциативное и логическое мышление.

Таким образом, требования к организации учебного процесса в контексте активизации познавательной деятельности, в целом должны опираться на отобранный методический материал, при этом реализовываться материал в различных формах, а также с помощью современных методов и приемов.

Заключение

Цель данной работы – разработать конспекты уроков с поэтапным решением задач на доказательство, направленных на формирование познавательных универсальных действий обучающихся. Для достижения поставленной цели в ходе исследования был решен ряд задач.

Проанализированы работы таких авторов, как А.Г. Асмолов, Н.М. Горленко, О.В. Запятая, которые рассматривали структуру познавательных универсальных учебных действий. Кроме того, были изучены работы, касающиеся методики работы при решении задач, таких авторов, как Г. И. Саранцев, В.А. Далингер, Д. Пойа.

Для решения второй задачи было рассмотрено понятие познавательных универсальных учебных действий, выделены их основные виды и пооперационный состав каждого действия. Конкретизация компонентов познавательных УУД была обусловлена тем, что в ФГОС ООО они сформулированы на достаточно обобщенном языке, а для их целенаправленного формирования необходимо выделить наиболее простые операции, входящие в состав каждого действия.

Изучены требования к организации учебного процесса, направленного на формирование познавательных УУД на уроках математики. Был сделан вывод, что ведущую роль в формировании познавательных универсальных учебных действий играет подбор содержания, выбор методических приемов, средств, разработка конкретного набора учебных заданий.

Для решения четвертой и пятой задачи были рассмотрены задачи, как средство формирования ПУУД, выделены основные этапы организации работы над теоремой и приемы работы на каждом из них. В процессе изучения методики работы по обучению решения задач на доказательство были выявлены особенности формирования познавательных УУД обучающихся, т.е. те компоненты ПУУД, которые формируются на данном этапе в ходе использования конкретных приемов и выполнения определенных действий. Проведенная работа позволила установить соответствие между деятельностью обучающихся в процессе решения задач на доказательство и операциями, входящими в состав каждого ПУУД. Результаты данного соответствия, представленные на схеме, наглядно демонстрируют, что обучение решению задач на доказательство дает возможность для формирования всех компонентов ПУУД, которое будет идти постепенно через обучение выполнять простые операции, входящие в состав каждого действия.

Также были выделены требования к отбору и конструированию задач на доказательство, направленных на формирование познавательных УУД обучающихся 7-9 классов.

Для иллюстрации теоретических положений были разработаны конспекты уроков с поэтапным решением задач на доказательство, направленных на формирование познавательных УУД обучающихся, таких как: *анализ объектов, установление причинно – следственных связей, построение логической цепочки рассуждений, знаково-символические действия, осознанное построение речевого высказывания в устной и письменной форме и др.*

Таким образом, результаты, которые были получены в ходе исследования, позволяют сделать вывод, что обучение решать задачи на доказательство является эффективным средством для формирования познавательных УУД обучающихся.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Абитаева, Л. Г. Формирование интеллектуальных умений в процессе обучения математике .Математическое образование: прошлое, настоящее, будущее: Материалы I Международной научно-практической конференции, посвященной памяти профессора Б. М. Бредихина, 1-2 ноября 2006 г. - М.; Самара : СГПУ, 2006. - 470 с.

[2]. Асмолов, А. Г. Как проектировать универсальные учебные действия в начальной школе: от действия к мысли: пособие для учителя / [А.Г. Асмолов, Г.В. Бурменская, И.А. Володарская и др.]; под ред. А.Г. Асмолова. — М. : Просвещение, 2008.

[3]. Асмолов, А. Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя / [А.Г. Асмолов, Г.В. Бурменская, И.А. Володарская и др.]; под ред. А.Г. Асмолова. 2-е изд. М.: Просвещение, 2011.

[4]. Атанасян, Л. С. Геометрия. 7—9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. — 20-е изд. — М.: Просвещение, 2010. — 384 с.: ил.

[5]. Блинова, Т. Л. Современные аспекты методики обучения математике: учеб. пособие / Т. Л. Блинова, Э. А. Власова, И. Н. Семенова, А. В. Слепухин; под ред. И. Н. Семеновой, А.В.Слепухина; ГОУ ВПО «Урал. гос. пед. ун-т». – Екатеринбург, 2007. – 190 с.

[6]. Боженкова, Л.И. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии: методическое пособие : [16+] / Л.И. Боженкова. – 4-е изд., электрон. – Москва : Лаборатория знаний, 2020. – 208 с. : ил.

[7]. Боженкова, Л.И. Познавательные универсальные учебные действия в обучении математике // Наука и школа. 2016. №1. С. 54-60.

[8]. Газейкина А. И., Казакова Ю. О. Диагностика сформированности познавательных универсальных учебных действий обучающихся основной школы // Педагогическое образование в России. - 2016. - №7. - С. 161-168.

[9]. Горленко Н.М., Запятая О.В., Лебединцев В.Б., Ушева Т.Ф. Структура универсальных учебных действий и условия их формирования // Народное образование. – 2012. – № 4.

[10]. Далингер, В.А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений. Кн. для учителя. - М.: Просвещение, 2006.- 256 с.

[11]. Епишева, О. Б. Технологии обучения математике на основе деятельностного подхода : Кн. для учителя / О. Б. Епишева. – М. : Просвещение, 2003. – 223 с.

[12]. Епишева, О. Б. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельности: Кн. Для учителя. - М.: Просвещение, 1990. - 128 с.

[13]. Задачи на доказательство // vasmirnov.ru URL: http://vasmirnov.ru/Problems/proof.htm (дата обращения 06.12.2020).

[14]. Задачи "на многозначность" как средство развития рефлексии учащихся при обучении геометрии // Микушева Наталья Павловна URL: https://www.dissercat.com/content/zadachi-na-mnogoznachnost-kak-sredstvo-razvitiya-refleksii-uchashchikhsya-pri-obuchenii-geom (дата обращения 01.12.2020).

[15]. Калмыкова, З.И. Продуктивное мышление как основа обучаемости / З.И. Калмыкова. – М. : Педагогика, 1981. – 200 с.

[16]. Лященко Е. И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ин-тов/ Е.И.Лященко, К.Б. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; Под редакцией Е.И. Лященко. - М.: Просвещение, 1988. - 223 с.: ил.

[17]. Математика в экзаменационных вопросах и ответах. Справочник для учителей и абитуриентов / Под редакцией Л. И. Василюк, Л. В. Куваевой, Б. К. Галикевич. – Минск: Изд-во БелЭн, 2013.

[18]. Математика. Комментарий к урокам. Методика обучения. Авторы Рудницкая В.Н., Юдачева Т.В.. Издательский центр «Вентана-Граф» 2012г.

[19]. Мельникова Е.Л. Проблемный урок, или Как открывать знания с учениками: Пособие для учителя. - М.: АПК и ППРО, 2002. - 168 с.

[20]. Мирзоахмедов М. Методика обучения решению прикладных задач при углубленном изучении математики: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. - Душанбе, 1989. - 125 с.

[21]. Пивоваркин О. К. Общий прием решения задач как компонент познавательных универсальных учебных действий // Современная наука: актуальные проблемы и пути их решения. – 2015. - №5 . - С. 115-117.

[22]. План конспект урока Геометрия 7 класс Тема «Решение задач по теоремам, о параллельных прямых» // Бекиров Алексей Рустамович URL: https://infourok.ru/plan-konspekt-uroka-geometriya-klass-tema-reshenie-zadach-po-teoremam-o-parallelnih-pryamih-1627822.html (дата обращения 10.12.2020).

[23]. Пойа, Д. Как решать задачу / Д.Пойа. – Львов, 1991. – 216 с.

[24]. Полат Е.С. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования: учеб. пособие для студентов вузов и системы повышения квалификации педагогических кадров. / Под ред. Е.С. Полат. - М.: «Академия», 2001. - 66 с.

[25]. Признаки параллелограмма. Задачи на параллелограмм. 8 класс. Геометрия // kursoteka.ru URL: https://www.kursoteka.ru/course/5313/lesson/19922/unit/50483/3 (дата обращения 03.12.2020).

[26]. Примерные программы по математике. – М.: Просвещение, 2010. – 67с.

[27]. Программа формирования универсальных учебных действий по математике в основной школе. // docplayer.ru URL: http://docplayer.ru/28451385-Programma-formirovaniya-universalnyh-uchebnyh-deystviy-po-matematike-vosnovnoy-shkole.html (дата обращения: 03.07.2020).

[28]. Рейнгард И.А. Сборник задач по геометрии и тригонометрии с практическим содержанием. - М.: Учпедгиз, 1960. - 116 с.

[29]. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов. - М.: Просвещение, 2002.- 224 с.: ил.

[30]. Саранцев Г.И. Методика работы с теоремой в контексте деятельностного подхода // Математика в школе. - 2016. - №3. - С. 35-42.

[31]. Системный анализ процесса мышления / Под ред. К.В. Судакова, АМН СССР. – М. : Медицина, 1989. – 336 с.

[32]. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрические задачи с практическим содержанием. - М.: МЦНМО, 2010. - 136 с.

[33]. Смирнова, А.А. Организация повторения9 классе при подготовке к аттестации в новом формате / А.А. Смирнова, Е.Ю. Лукичёва, А.Н. Тернопол // Математика в школе. – 2010. – № 3. – С. 34–41.

[34]. Степанова О.В. Формирование познавательных универсальных учебных действий средствами игры // Приоритетные научные направления: от теории к практике. - 2016. - №21. - С. 42-47.

[35]. Туйбаева Л.И., Жиганова М.Ю. Формирование познавательных универсальных учебных действий младших школьников // Проблемы педагогики / Problems of pedagogy. – 2015 - № 2(3).

[36]. Туркина, В.М. Методический аспект проблемы преемственности в развивающем обучении школьников математике / В.М. Туркина // Известия РГПУ им. А.И. Герцена. – 2003. – № 6 (том 3). – С. 249–258.

[37]. Урок по теме «Решение задач по теме «Параллельные прямые»», 7 класс // Малакмадзе Татьяна Леонидовна URL: https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/library/urok_po_teme_reshenie_zadach_po_teme_parallelnie_172135.html (дата обращения 04.12.2020).

[38]. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования от 17 декабря 2010 г. № 1897 // Министерство

образования и науки Российской Федерации. URL: https://fgos.ru/ (дата обращения: 21.07.2020).

[39]. ФОРМИРОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ // Леухина Любовь Викторовна URL: http://xn----8sb3aemcew1d.xn--p1ai/formirovanie-universalnyh-uchebnyh-dejstvij-na-urokah-matematiki/ (дата обращения: 25.11.2020).

[40]. Формирование познавательных УУД младших школьников в процессе обучения математики. Выпускная квалификационная работа // Чулпанова Наталья Олеговна URL: https://infourok.ru/diplom-formirovanie-poznavatelnih-uud-mladshih-shkolnikov-v-processe-obucheniya-matematiki-3628160.html (дата обращения 11.11.2020).

[41]. Фридман Л.М. Сюжетные задачи по математике. История, теория, методика: учеб. пособие для учителей и студентов педагогических вузов и колледжей. М.: Школьная пресса , 2002. 208 с.

[42]. Хнычкина Е. Е. Познавательные универсальные учебные действия и их оценка - стратегия развития учителя // Муниципальное образование: инновации и эксперимент. 2014. №4. С. 18-20.

[43]. Чуланова Н.А., Черняева Т.Н. Нормативный контекст определения «познавательные универсальные учебные действия» // Современные проблемы науки и образования. - 2014. - №6. - С. 179-186.